**Análise Matemática**

**Fórmulas básicas de álxebra**

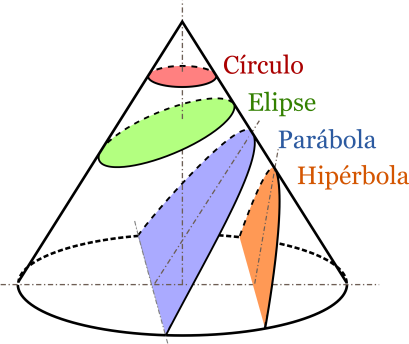
* **Regras de fraccións:** 
* **Regras de potencias:**
* **Regras de desigualdades:** Se a<b:
  + a+c<b+c, a\*c<b\*c, -b<-a, 1/b<1/a
* **Regras de valor absoluto:**
  + |a\*b| = |a|\* |b|, |a/b| = |a|/|b|
  + |a+b| <= |a|+|b|, |a-b|>= ||a|-|b||
  + |x|<a ⇔ x€(-a,a)
  + |x|>a ⇔ x€ R\[-a,a]

**Rectas**

* Unha recta no plano dase xeralmente na forma xeral: Ax+By+C=0.
* Se pasa por (x0, y0) con pendente m, a ec. é: y-y0=m(x-x0)
* Se coñecemos o vector director v=(v0,v1), y-y0 = v1/v0 \* (x-x0)
* Se pasa por dous puntos (x0,y0) (x1y1), (y-y0)/(y1-y0) = (x-x0) / (x1-x0)

**Planos**

* O plano dase habitualmente na forma xeral Ax+ By+ Cz +D = 0.
* Se coñecemos o punto x0 e os vectoores u e v, a ec. é: det(x-x0, u, v) = 0
* Se coñecemos 3 puntos x0, x1, x2 , calculamos os vectores para o caso previo.
* Se coñecemos o punto x0 e é perp. ao vector n, a ec é: (x-x0)\*n = 0

**Cónicas**

* As cónicas son as curvas planas resultantes de intersectar un plano cun cono.
* A ecuación dunha cónica en coordenadas cartesianas é un polinomio en (x,y) de grao 2.

**Elipse e circunferencia**

* A ecuación da elipse centrada no punto (x0, y0) con semieixos (a,b) paralelos aos eixos coordenados é: 
  + No polinomio de grado 2 que define a elipse os coeficientes dos monomios en x2 e y2 sempre teñen o mesmo signo.
  + Cando a=b=r, obtemos a ecuación da **circunferencia** centrada no punto (x0, y0). O seu radio é r, onde 
* A ecuación paramétrica da elipse é 

**Parábola e hipérbola**

* A ecuación da parábola de eixo vertical e vértice (x0, y0) é .
* Na parábola de eixo horizontal sería o mesmo pero intercambiando x e y
* A ecuación da hipérbola é a mesma ca a da elipse pero cunha resta: 

**Identificación de funcións**

* Unha **función** é unha regra que asigna a cada elemento do dominio un único elemento da imaxe.
* Unha **gráfica** é a repesentación dos putnos con abscisas no dominio e con ordenadas as súas correspondentes imaxes.
* O **dominio** son os puntos x para os cales f(x) está definido.
* A **imaxe** son os puntos f(x) para os que x € dom f.
* Defínese **Gr(f)** = {(x,f(x) € R2 | x€dom(f)}. Es decir, el conjunto de los pares formados por un número del dominio y su imagen.

**Propiedades das rectas**

* A ecuación da recta é unha función linear. Entón, verifica que r(x+y)=r(x)+r(y), e r(kx)=k\*r(x).
* **Só as funcións lineares** (é dicir, rectas na gráfica) cumplen esta propiedade. Entón, calqueira función que sea cónica non a cumple.

**Funcións polinómicas**

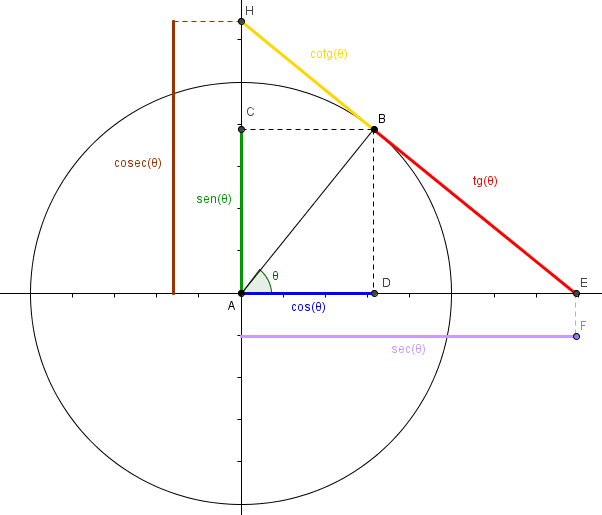
* As propiedades de y=xn con n **natural** dependen de se n é par ou impar.
  + O dominio é R, a imaxe é [0,+inf) se n é par ou R se n é impar.
* Con potencias **negativas**:
  + O dominio é R\0. De novo a imaxe das potencias pares é só maiores de 0.
* Con potencias **fraccionarias**:
  + O dominio con denominador par é [0,+inf), e con den. impar é R.
  + A imaxe coincide co dominio en ambos casos.
  + En sage**,** se o denominador é impar e x negativo (por exemplo, (-1)^(⅓), devolve 0.5+0.866oI.
    - Isto é debido a que devolve o resultado en función dun número complexo, a pesar de que o resultado se pode expresar como número real.
    - Existe a función *real\_nth\_root*(x, 3) para obter o mesmo resultado.

**Funcións exponenciais e logarítmicas**

* As exponenciais son da forma y = a^x, con a positivo. O dominio é R é a imaxe (0,+inf). Son crecentes e crecen máis rápido ca calquer polinomio.
* A inversa de y=a^x é o logaritmo. Se a base é e, é o logaritmo neperiano.
  + O dominió é (0,+inf), a imaxe é R e son crecentes.

**Simetría**

* Unha función é **par** se para todo x, f(x) = f(-x).
* Unha función é **impar** se para todo x, f(x) = -f(-x).

[**As funcións trigonométricas**](https://fundmat.wordpress.com/2011/01/08/as-funcions-trigonometricas/)

* No caso do seno e coseno, o dominio é R e a imaxe é [-1,1].
  + O seno crece para ángulos no 1º e 4º cuadrante, decreciente no 2º e 3º.
    - Anúlase para ángulos función de pi
  + O coseno crece para ángulos no 3º e 4º cuadrante, decrece no 1º e 2º.
    - Anúlase para ángulos función de pi/2

| **Outras funcións** | sec (a) | csc(a) | tan(a) | cot(a) |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Definición | 1/cos(a) | 1/sen(a) | sen(a)/cos(a) | cos(a)/sen(a) |
| Dominio | Ángulos distintos de pi/2 + k\*pi | Ángulos distintos de k\*pi | Ángulos distintos de pi/2 + k\*pi | Ángulos distintos de k\*pi |
| Imaxe | R\(-1,1) | R\(-1,1) | R | R |
| Tipo | Par | Impar | Impar, crecente | Impar, decrecente |

**Identidades trigonométricas**

* sen(a)2 + cos(a)2 = 1
* cos(A+B) = cos(A)cos(B) - sen(A)sen(B)
* sen(A+B) = sen(A)\*cos(B) + cos(A)\*sen(B
  + Ángulo doble: cos(2·A) = cos(A)² – sen(A)², sen(2·A) = 2·sen(A)·cos(A)
* 1+tg2(x) = 1/cos2(x)

|  | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| rad | 0 rad | pi/6 rad | pi/4 rad | pi/3 rad | pi/2 rad |
| sen | 0 | 1/2 | √2/2 | √3/2 | 1 |
| cos | 1 | √3/2 | √2/2 | 1/2 | 0 |
| tan | 0 | 1/√3 | 1 | √3 | - |

**Interpolación polinomial**

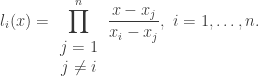
**Interpolación polinomial**

* Se dunha función coñecemos só un conxunto de puntos polos que pasa a súa gráfica, dise que **interpolar** a función é procurar unha función p(x) que pase polos puntos. Se p(x) é un polinomio, trátase de **interpolación polinomial**.
  + O erro, polo menos nos puntos, será 0.
  + Pode ocorrer o denominado ‘fenómeno de Runge’ cando se trata de pasar por todos os puntos, cando hai moitos puntos dispersos e a función queda demasiado oscilante.
    - Isto leva a que, fóra dos puntos coñecidos, a función sexa moi imprecisa.

**Polinomio de interpolación**

* Supoñamos que temos os nodos de interpolación {xi}, distintos dous a dous, e o valor da función f nestes nodos é {yi}.
* Diremos que o polinomio de grao m interpola a f nos nodos de interpolación se para todo i en [1,n].
  + É dicir, o polinomio interpola a f se, nos nodos, ten o mesmo valor que f.
  + Para que o sistema formado sexa CD, **m=n-1**

**Cálculo do polinomio de interpolación**

* Un dos métodos máis sinxelos consiste en calcular antes unha **base do espazo de polinomios.**
  + Os polinomios desta base son denominados **polinomios de Lagrange**
* O i-ésimo polinomio de Lagrange para os nodos {xj} determínase como o único polinomio de grao n-1 que verifica:
* . Este polinomio toma valor 1 no nodo j e 0 nos demais.
* 
* O **polinomio de interpolación dos puntos** será: 
* En cada valor i, **p(xi) = yi**. Isto é debido a que yi  estará multiplicada por 1, e os demais valores por 0.
* **Exemplo**: Interpolación de e^x con 3 puntos. x1=0, x2=1, x3=2.
  + Primeiro, construímos a base.
    - Véxase a condición do produtorio, j=1, **j=/=i.**
    - i=1, j=/=i, j=2,3
    - l1 = \* =
    - Comprobamos: l1(x1) = ½\*(0-0+2) = 1, l1(x2)=0, l1(x3)=0. É correcto.
    - l2(x) = \* = 2x-x^2
    - l3(x) = \* = ½ \* x(x-1)
    - p(x) =
    - p(x) =
    - Esta función polinómica devolve unha gráfica que coincide con e^x nos puntos dados, pero comete un determinado **erro** nos demais puntos.

**Cálculo do erro na interpolación**

* Dise que f é **n veces continuamente diferenciable en (a,b)** se existe a súa derivada n-ésima e esta derivada é continua no intervalo [a,b]
* Se f é n veces continuamente diferenciable en (a,b), para cualquiera x € [a,b] existirá un punto cx € (a,b) tal que:
  + 
* Non coñecemos o valor de cx , polo que asumimos que se trata do máximo valor en (a,b)
  +  Sendo M o límite máximo do erro.
* Entón, podemos afirmar:
  +  Entón, a segunda parte da inecuación será o valor máximo que pode tomar o erro.

**Exemplo de cálculo do erro na interpolación**

* Calcular o erro máximo que se comete ao aproximar y=cos(x) coa parábola que pasa polos puntos 0, pi/2, pi. Estima o erro para x =7pi/18 rad.
* |cos(x) - p(x)| <=
  + = 1
* |cos(x) - p(x)| <=
* |cos(7pi/18) - p(7pi/18)| <=
* |cos(7pi/18) - p(7pi/18)| <= 0,4. Logo, o erro máximo que se pode cometer no punto x=7pi/18 tomando estos 3 puntos.

**Interpolación por tramos**

* Para resolver os erros causados polo fenónemo de Runge, emprégase a **interpolación por tramos**, onde en cada tramo o polinomio sexa de grao baixo.
* Un exemplo pode ser o emprego de rectas para as distintas partes dunha curva. Coñecendo n puntos, podemos determinar n-1 intervalos determinados por n-1 rectas.
  + Sea h a distancia entre puntos, que coñecemos que é a mesma. 
  + Se ademais o valor máximo da derivada segunda da función en [a,b] é M:
  + 
  + Entón, ao aumentar o número de nodos, o erro diminúe cuadráticamente, polo que non se produce o fenómeno de Runge.
* Porén, un polinomio de interpolación por rectas xeralmente non é derivable nos nodos de interpolación.
  + Para resolverlo, tomamos en cada intervalo [xi, xi+1] un polinomio de grao 3, p(x), de tal forma que a unión dos polinomios sexa continua, con derivada primeira e segunda tamén continuas.
  + O resultado coñécese como **spline cúbico**..

**Límites**

* Dise que o límite dunha función f no punto a é L se, cando x se achega a a, f(x) se achega a L, sen excepción.
* C contorno de x0 se existe r>0 tal que (x0-r, x0+r) C C. Es decir, un contorno de x0 es un conjunto que comprende, al menos, todos los números relativamente (según r) más próximos a x0.
* Para demostrar un límite, sería preciso comprobar infinitos valores. Un xeito de formalizar esta idea é mediante **contornos**: o límite de F en a é L se, para todo contorno Y de L, existe un contorno XY de a tal que: 
  + Este método aplícase para calcular propiedades das funcións, e para calcular a orde de converxencia dun algoritmo.

**Cálculo de límites sen indeterminación**

* Suporemos certo que:
  + limx→x0c = c, se c é unha constante.
  + limx→x0 x= x0 (o límite de x é o valor do límite)
* Dados os límites limx→x0f(x)=L e limx→x0g(x)=M, cúmplese que limx→x0[f(x)+g(x)]=L+M.
  + O mesmo é certo para calqueira operación básica (+,-,\*,/)
* As **indeterminacións** son resultados do tipo \displaystyle \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, \displaystyle \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty .

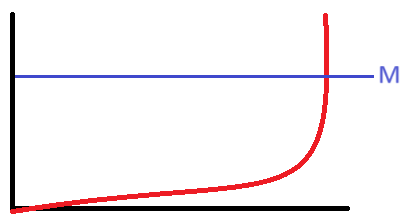
**Cálculo de límites con indeterminación**

* Primeiro, aplícanse técnicas como a eliminación de factores comúns ou L’hópital.
* **Eliminación de factores comúns:** Empregada en indet. 0/0 ou \displaystyle \frac{\infty}{\infty}. Se temos un polinomio no numerador e denominador, podemos simplificalo (aínda que implique dividir entre un término que tende a 0) dividindo ou multiplicando polo mesmo factor en ambas partes.
  + Por exemplo,  inicialmente da 0/0. Multiplicamos arriba e abaixo por 3-√(x2+8), e queda . Simplificamos 000000(1-x2)/(1-x)=(1+x), e queda como resultado 2/(3+3) = ⅓.
* No caso de **límites no infinito de funcións racionais**, tamén podemos compararar o grao dos polinomios e dividir pola x de maior expoñente. Por exemplo, se temos , a solución será ¼.
* En límites do tipo  nas que se obtén 0/0, emprégase a **regra de L’hôpital**, que consiste en derivar a función do denominador e numerador.
  + Para isto, é preciso que existan as derivadas de f e g, e que a derivada de g non se anule en C\X0.

**Demostración de inexistencia dun límite**

* Unha das formas nas que podemos demostralo é se os límites laterais son distintos.

**Propiedades dos límites**

* Se **lim x->x0 f(x) > 0**, daquela existe C contorno de x0 onde **f(C)>0**.
* Se **lim x->x0 f(x) = +inf** , dado M>0, daquela existe C contorno de x0 onde **f(C\X0)>M**. Sendo M calqueira número.
  + Si la función tiende a infinito,podemos establecer cualquier número M, y la función siempre superará eventualmente este M en el **contorno** del punto (no en el propio punto) donde f tiende a infinito.

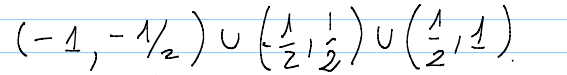
**Continuidade**

* f é continua en x0 se e solo se limx->x0 f(x) = f(x0).
* f é continua nun intervalo I se e solo se f é continua en x para todo x€I.
* Para ser continua en x0 debe estar definida en x0.
  + **Exemplo:** f(x) = x2-1 / x-1 non pode ser continua en 1, pois non está definida en 1.
  + Comprobamos se se pode extender a x=1 con continuidade. Calculamos o límite en x=1.
  + limx->1 (x2-1)/(x-1) = = 2.
  + f’(x) [[1]](#footnote-0)= (x2-1)/(x2-1) se x!=1,

2 se x=1.

* Esta nova f’(x) extendida si é continua en x=1.

**Demostrar que unha función é continua** de forma construtiva

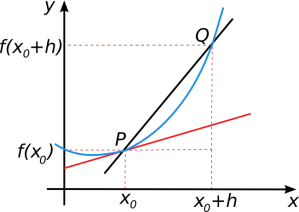
* Sexan dúas funcións f,g continuas nun punto x0, f operado[[2]](#footnote-1) con g é continua en x0 se non leva a indeterminación ou +-inf.
* **Exemplo:** f=senx, g=tgx. se ambas son continuas, tamén o serán senx+tgx, senx\*tgx…
* Se g é continua en x0 e f é continua en g(x0), **fºg** será continua en x0.ç
  + Observación: (fºg)(x0) = f( g(x0) )
* Estas regras serán empregadas para comprobar se unha función é continua.
* [**Exemplo**](https://fundmat.files.wordpress.com/2023/11/continuidade2.pdf)**:** Achar o conxunto onde y = tg(pi\*x)/raíz(1-abs(x)) é continua
  + A función tanxente será continua en todos os puntos reales, **excepto** os valores que son múltiplos impares de pi/2.
    - Logo, tg(pi\*x) non pode ser múltiplo impar de pi/2. Obtenemos que a función non é continua para valores impares de x/2. É dicir, tg(pi\*x) non é continua cando x = k\*½, con k impar, k€Z.
  + Ahora comprobamos o denominador.
    - O denominador debe ser distinto de 0. Excluímos tanto o -1 como o 1.
    - A raíz cuadrada será continua en [0,+inf). Serán inválidos valores que cumplan que |x|>1. Logo, x€(-1,1)
  + Volvendo ao caso previo, coñecemos que x!=½ e x!= - ½.
  + Logo, a función é continua en 

**Teorema de valor intermedio**

* Se f é continua en [a,b], daquela f alcamza todos os valores entre f(a) e f(b).
  + Logo, se f(a) ten signo distinto de f(b), coñécese que debe existir algún punto c€[a,b] tal que f(c). (**Teorema de Bolzano**).
    - Isto é debido a que coñecemos que 0€[f(a),f(b)].
  + Isto é útil para calcular as **raíces** dunha función (ou, polo menos, se as ten).
    - Os métodos de cálculo simbólico integrados en moitos programas informáticos só funcionan para calcular as raíces dun número limitado de funcións. Por exemplo, poden funcionar para unha ec. cuadrática pero non para unha trigonométrica.
    - Outros métodos permiten calcular as raíces, mais requieren coñecer primeiro se as funcións teñen raíces ou non.
  + Por exemplo, coñecemos que a función y=cos(x)-x ten, polo menos, unha raíz en [0,pi].
    - Isto é debido a que a función é continua neste intervalo (xa que cos(x) é continua no intervalo, e x tamén) , e mentres que y(0) é positivo, y(pi) é negativo.

**Cálculo diferencial e interpolación**

**Cálculo diferencial** (derivadas)

* Ao longo deste tema, estudáronse conxuntos progresivamente selectos de funcións.
  + Inicialmente observáronse as funcións. Logo, foi reducido a funcións continuas, sobre as que aplicar propiedades como o teorema de valor medio.
  + Dentro das funcións continuas, un subtipo serán as funcións **derivables** (nun intervalo)
* A **pendente** dunha función nun punto defínese como a inclinación da recta tanxente á súa gráfica. A pendente dá unha idea do rápido que medra a función nese punto.
  + A pendente calcúlase como o límite da pendente das rectas secantes:
  + 
  + Cando h tende a 0, Q aproxímase a P, e no límite temos unha aproximación da pendente da recta tanxente. Con todo, este método é xeralmente innecesario para calcular pendentes.
* Consideremos a **derivada** dunha función nun punto coma o valor da pendente desa función nese punto.
  + 
  + f dise **derivable** en x se existe o límite en x. Será derivable nun intervalo se é derivable para todos os x dese intervalo.
* A partir do límite anterior, podemos coñecer a derivada en moitos casos:
  + Derivada dunha suma de funcións derivables en x: \displaystyle \big(u(x)\pm v(x)\big)' = u(x)'\pm v'(x).
  + Derivada dunha multiplicación de ídem:
  + Derivada da exponencial: \displaystyle \big(\exp(x)\big)' = \exp(x).
* As demais regras necesarias obtéñense a partir da **regra da cadea:** 
  + Desta regra pódense deducir as derivadas daquelas funcións que se poden escribir como **composición doutras.**  Por exemplo,
    - 
    - ex ln a é unha función composta, sendo u(x)=ex e v(x)=ln a.
* A **derivación implícita** emprégase para curvas nas que non é posible facilmente despexar y en función de x.
  + Por exemplo, y=x2 é explícita. Porén, sen(y-x2)=5 é ímplíficta.
  + **Exemplo:** Sexa x2+y2=1 (pódese despexar y pero non se vai facer). Asumimos que y(x) é derivable.
    - Derivamos ambas partes da ecuación. d/dx (x2+y2) = d/dx(1) = 0.
    - d/dx (x2+y2) = d/dx (x2) + d/dx(y2) = 2x + 2\*(y(x))\*y’ = 0
    - y’ = -x/y
    - Analizamos y2 como unha función composta, onde v(x)=x2 e u(x)=y(x).
  + A partir da derivación implícita obtéñense regras de derivación como a do logaritmo ou as do arcoseno, arcotanxente…

**Polinomio de Taylor**

* O **polinomio de Taylor** é unha maneira de aproximar unha función mediante un polinomio. Permite ver como aproximar a función cando se coñecen varios graos da derivada nun só punto.
* Definimos unha función continua nun punto x0 e con derivadas continuas en x0 ata o grao n. Definimos o polinomio de Taylor da función f de grao n arredor do punto x0 como:
* 
* **Exemplo:** y=sen(x) arredor de 0, de grao 4. x0=0
  + y = sen x, y(0) = sen(0) = 0
  + y’ = cos x, y’(0) = cos(0) = 1
  + y’’ = -sen x, y’’(0) = -sen(0) = 0
  + y’’’= -cos x, y’’’(0) = -cos(0) = -1
  + yIV = y, yIV(0) = 0
  + Tn,x0 = 0 + 1(x-0) + 0 -1\*0 +0\* = x -
* Canto maior sexa o grao considerado, maior será a precisión.

**Estimación do erro no polinomio de Taylor**

* O erro cometido ao aproximar unha función f polo osu polinomio de Taylor de grao n arredor de x0 chámase **resto de grao n+1**:
  + Rn+1 = f(x) - Tn(x) = , con C entre x0 e x.
  + Rn+1 = <=
  + Consideramos cal é o valor máximo de f(n+1)(c). Denominamos M a este valor.
* Xeralmente, o valor M de **tolerancia** será aportado polo enunciado.
  + Por exemplo, se obtenemos que Rn+1 = , e o enunciado di que a tolerancia é 10-6. Debemos resolver Rn+1 = <=10-6 para atopar o grao que precisamos.
  + Neste caso, coñecemos que (n+1)! => 3\*106.
  + Por tanteo, obtenemos que n=9.
* **Exemplo exercicio:** Cálculo de en qué intervalo pode substituirse o coseno pola aproximación (1 - x2/2 + x4/24) sen cometer un error maior de 10-4.
  + Calculamos o polinomio de Taylor do coseno arredor de 0. Dado que a aproximación do enunciado posúe grao 4, tomamos grao 5 para ser máis precisos.
    - y = cos0 = 1
    - y’ = -sen0 = 0
    - y’’ = -cos0 = -1
    - y’’’ = sen 0 = 0
    - yiv = cos 0 = 1
    - yv = -sen0 = 0.
  + T5(x) = 1 + 0x -1\*x2/2 + 0x3/6 + 1\*x4/24 + 0\*x5/120 = 1 -x2/2 + x4/24.
    - Coincide coa función dada no enunciado.
  + Ahora. calculamos cando o residuo é menor de 10-4 cando tomamos grao 5.
  + |Rn+1, x0(x)| < tol → |R6,0(x)| < 10-4.
    - Calculamos a derivada sexta, que é [-cos(c)]
  + R6,0(x) = (-cos(c))/6! \* (x-0)6
  + R6,0(x) =
  + Logo, despexamos a x. |x| <

**Derivación numérica** mediante polinomio de Taylor

* O **polinomio de Taylor** permite tamén aproximar a derivada dunha función. Se f é 3 veces continuamente diferenciable, para h>0,
  + f(x+h) = f(x) + h\*f’(x) + h2\*(f’’(c)/2), para c entre x e x+h.
  + Despexando a derivada: 
  + Se f’’(c) está limitada por unha constante, para c entre x e x+h, o erro redúcese linearmente con h, coa **notación de Landau**. Logo, expresamos o erro como O(h).
  + f’(xi) . Para dous puntos xi e xi+1 separados por unha distancia h.
  + Isto defínese como a diferencia finita dividida (DFD) cara adiante de 2 puntos (x e x+h)
* Este método tamén se pode empregar ‘cara atrás’, escribindo a fórmula de Taylor pero para x=xi-1 e logo despexando a derivada.
  + f(xi-1) = f(xi) + f’(xi)\*(xi-1 - xi) + O(h2). (xi-1-xi) = -h.
  + f’(xi) = Esta fórmula defínese como a DFD cara atrás de 2 puntos.
* Finalmente, podemos aproximar a derivada ‘centrada’, restando os polinomios de Taylor para x=xi-1 e x=xi+1.
  + 
    - O(h2) significa que o erro diminúe máis rápido.
* Este mesmo método serve para calcular tamén a **derivada segunda**, se sumamos os polinomios de Taylor para x=xi-1 e x=i+1.
  + 

**Aproximacións da derivada con tres puntos**

* Aumentando o número de puntos involucrado nas fórmulas, aumentamos a precisión da aproximación.
* Por exemplo, se operamos cos polinomios de Taylor para x=x, x=xi+1 e x=xi+2, obtenemos a DFD cara adiante de 3 puntos:
  + 
* Se tomamos os polinomios de Taylor para x=x, x=xi-1 e x=xi-2, obtenemos a DFD cara atrás de 3 puntos:
  + 
* Ambas fórmulas teñen erro O(h2) polo que este erro se reduce máis rapidamente co aumento de h.
  + Aumentando aínda máis os puntos, poderíamos obter fórmulas con erro h3 ou mais. Porén, estas fórmulas de orde superior só se empregan cando estamos seguros da regularidade das funcións que aproximamos.

**Teoremas de Rolle e do valor medio**

* Ter en conta que todas as funcións derivables nun punto son tamén continuas nel.
* **Teorema de Rolle:** Se unha función é continua en [a,b] e derivable en (a,b), e se cumple que f(a)=f(b), existe polo menos un punto en (a,b) no que f’(c)=0.
  + Este teorema pódese empregar para comprobar que a raíz dunha función nun intervalo é única (coñecendo primeiro que existe).
  + Por exemplo: *A raíz de y = cos(x)-x en [0,π] é única*. Coñecemos que isto é certo porque a súa derivada, y’=-sin(x)-1 nons e anula en (0,pi).
    - Primeiro, hai que comprobar se existe a raíz no intervalo.
    - Se y tivese outra raíz nese intervalo, existiría un subintervalo onde f(a)=f(b)=0. Logo, a derivada tería que anularse nese subintervalo
    - Isto só se aplica se a función é **continua** no intervalo..
* **Teorema do valor medio:** Se unha función é continua en [a,b] e derivable en (a,b), existe sempre un punto en (a,b) no que a derivada é igual a .

**Extremos de funcións**

* Un **extremo** é un punto onde a función acada un máximo ou un mínimo.
* O extremo denomínase local se está circunscrito a un contorno do punto.
  + O extremo denomínase absoluto nun intervalo I se é local no contorno C e ese contorno C coincide con I.

**Busca de extremos locais**

* Para buscar extremos locais é preciso calcular os puntos onde a derivada é nula, denominados **puntos críticos.**
* Nestes puntos, calculamos a derivada de menor grao distinta de cero.
  + Se o grao da derivada é par, trátase dun extremo local.
    - Se a derivada é negativa trátase dun máximo, se é positiva un mínimo.
  + Se o grao da derivada é impar, trátase dun **punto de inflexión**.

**Busca de extremos absolutos**

* No caso de funcións continuas cando o intervalo I é pechado, sempre existe algún extremo absoluto.
* Os candidatos posibles serán:
  + Puntos críticos
  + Puntos onde a función non é derivable
  + Extremos do intervalo.

1. Lease como f(x) extendida, é dicir, f(x) cun punto engadido ao dominio. Represémtase con un guión ñ enriba da f. [↑](#footnote-ref-0)
2. Operando: f+g, f-g, f\*g. Para o caso f/g, ademais sería necesario que g(x0) non fose 0. [↑](#footnote-ref-1)